Analyse

Tout le catalogue sur
www.dunod.com

ÉDITEUR DE SAVOIRS

Jean-Pierre Escof er
Françoise Guimier
Jean Houdebine
Marie-Pierre Lebaud
Ronan Quarez
Pierre-Vincent Quéré
Michel Viallard

Analyse

Apprendre à partir d'une base d'exercices. Niveau L1

DUNOD

Illustration de couverture :
©iconspro – Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 2013
ISBN 978-2-10-057665-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 1

Introduction · Résolution de problèmes et apprentissage 7

1 Les mathématiciens et les problèmes 7
2 Quelques points forts de la résolution de problèmes 8
3 Approfondir des connaissances 10
4 Acquérir des compétences 10
5 Déclencher une activité de résolution de problèmes 11

PARTIE I LIRE ET ÉCRIRE DES MATHÉMATIQUES

Chapitre 1 · Travailler sur les énoncés 17

1.1 Travailler sur le sens du et ET du OU 18
1.2 Travailler sur l'implication 20
1.3 Travailler avec les quantificateurs 23
1.4 Le rôle essentiel de la négation 27
1.5 Reconnaître que deux propositions ont la même signification 29
1.6 Exemples et contre-exemples 33

Chapitre 2 · Travailler sur les démonstrations 37

2.1 Écrire des démonstrations avec des contraintes 37
2.2 Écrire des démonstrations avec une aide 41
2.3 Analyser des démonstrations 45
2.4 Analyser des erreurs dans des démonstrations 50
2.5 La démonstration comme aide à la résolution 52
2.6 D'autres textes mathématiques 54
Indications de résolution pour la partie I 57

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Partie II Travailler avec les nombres complexes

Chapitre 3 · Travailler avec les nombres complexes **63**

3.1 Forme algébrique des nombres complexes 63
3.2 Inégalités triangulaires 65
3.3 Forme trigonométrique et forme exponentielle 67
3.4 Transformation de fonctions trigonométriques 70
3.5 Racines *n*-ièmes 72
3.6 Équations du second degré 74
3.7 Nombres complexes et géométrie 75
Indications de résolution pour la partie II **78**

Partie III Étudier et utiliser les suites numériques

Chapitre 4 · Déterminer une limite **83**

4.1 Utiliser des moyens élémentaires 83
4.2 Utiliser des limites de fonctions 86
4.3 Utiliser des suites géométriques 88
4.4 Transformer le terme général 90

Chapitre 5 · Étudier la convergence **93**

5.1 Suites monotones 93
5.2 Suites de Cauchy 100
5.3 Utilisation du lemme de Cesàro 100
5.4 Sommes de Riemann 101
5.5 Suites et séries 103

Chapitre 6 · Utiliser une suite pour approcher un réel **105**

6.1 Utiliser des suites adjacentes 105
6.2 Utiliser le théorème du point fixe 107
6.3 Utiliser la méthode de Newton 109
6.4 Une autre idée 111

Chapitre 7 · Étudier la rapidité de convergence **113**

7.1 Utiliser des développements limités 113
7.2 Utiliser des suites récurrentes 113

7.3 Utiliser les relations entre suites et séries 114
Indications de résolution pour la partie III 116

PARTIE IV ÉTUDIER LES FONCTIONS DE $\mathbb{R}$ DANS $\mathbb{R}$

Chapitre 8 · Étudier une fonction au voisinage d'un point 125

8.1 Étudier des limites 125
8.2 Prolonger une fonction 129
8.3 Travailler sur les limites à l'infini 132

Chapitre 9 · Étudier globalement une fonction 137

9.1 Étudier les variations 137
9.2 Majorer et minorer 139

Chapitre 10 · Utiliser les propriétés des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 143

10.1 Étudier l'existence de solutions d'équation 143
10.2 Utiliser une méthode d'approximation 144
10.3 Étudier une relation fonctionnelle 148
10.4 Une fonction et son graphe 149
Indications de résolution pour la partie IV 154

SOLUTIONS DES EXERCICES

Partie I – Lire et écrire des mathématiques 159
Partie II – Travailler avec les complexes 182
Partie III – Étudier et utiliser les suites numériques 191
Partie IV – Étudier les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 211

AVANT-PROPOS

PRÉSENTATION

Ce livre s'adresse à toutes celles et à tous ceux qui ont ressenti, un jour, la difficulté de résoudre un exercice de mathématiques alors qu'ils pensaient connaître et maîtriser le cours correspondant.

L'idée centrale est que la véritable compréhension d'un cours de mathématiques se construit en résolvant des exercices. C'est donc en partant des exercices que nous allons ici aborder les notions importantes, nécessaires à leur résolution, et non pas en délivrant un cours au préalable. Celui-ci s'en trouve donc transformé.

Les exercices retenus sont très variés, car ils ont été choisis pour illustrer, sans redondance, le plus d'aspects possible de chaque notion. Ils sont accompagnés par des explications sur les méthodes et techniques classiquement utilisées mais qui sont rarement explicitées dans les manuels. Les démarches heuristiques (s'aider d'un dessin ou d'un exemple, reformuler une situation, inventer des questions ou des sous-problèmes...) sont également mises en valeur.

La lecture de ce livre permettra à un étudiant de se convaincre que faire des mathématiques, c'est avant tout résoudre des problèmes. Il prendra conscience que, pour réaliser cet objectif, il ne suffit pas de travailler un cours, puis de résoudre des exercices répétitifs, qui se résument à l'application de règles ou de formules ou à l'utilisation d'une technique donnée. En effet, cette démarche donne, trop souvent, une vision des mathématiques fragmentée, où les concepts mathématiques et leurs propriétés complexes n'ont guère de place et qui se révèle finalement peu attrayante.

L'étudiant acceptera alors plus volontiers de s'attaquer à des exercices plus difficiles, dont la résolution ne sera pas immédiate.

Cet ouvrage peut aussi aider de futurs enseignants ou des enseignants en exercice à concevoir de nouveaux scénarios, pour mettre la résolution d'exercices au centre de l'apprentissage. Les programmes actuels des collèges et lycées désignent ce type de scénario sous le nom de démarche d'investigation. L'introduction explicite les idées indispensables pour y parvenir. Elle pourra aussi aider les étudiants à comprendre les raisons profondes de l'efficacité de la démarche proposée et les encourager à s'y investir pleinement.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Quatre domaines ont été sélectionnés :

- lire et écrire des mathématiques ;
- travailler avec les nombres complexes ;
- étudier et utiliser les suites numériques ;
- étudier les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Les trois derniers font classiquement partie du programme de première année de Licence. Les notions abordées dans le premier sont plus rarement explicitées, bien qu'elles soient la source de graves difficultés pour les étudiants.

L'entrée dans une notion se fait à chaque fois *via* des exercices. Le nombre d'étoiles indique leur difficulté relative. Vous trouverez, à la suite des exercices, des éléments de cours et des méthodes et techniques utilisables dans leur résolution.

Des indications pour la résolution sont présentes après chaque partie. Vous éviterez de vous tourner trop rapidement vers elles, pour privilégier votre recherche personnelle.

Les solutions se trouvent en fin de livre. Elles sont accompagnées d'idées à retenir, à consulter après avoir compris la résolution du problème ; il s'agit d'un texte assez court qui comporte soit des résultats, soit des techniques, utilisés dans l'exercice, mais de portée assez générale pour qu'il soit utile de les retenir.

Ce livre est le fruit d'un travail mené au sein de l'IREM de Rennes depuis de nombreuses années et qui a conduit à la conception du site BRAISE, (Base RAISonnée d'Exercices), reposant sur les mêmes idées que celles développées ici. Ce site, librement accessible en ligne, présente une sélection d'exercices concernant de nombreux autres thèmes du programme de Licence.

Cet ouvrage peut constituer une introduction à l'utilisation de BRAISE. Il renvoie d'ailleurs régulièrement au site, pour vous inciter à prolonger et compléter votre travail. Ces renvois sont signalés par une indication du type suivant :

➤ **Aller plus loin avec BRAISE**

Thème : Activités à partir d'une courbe
Nature de la tâche : Exploiter un graphe

Cela veut dire qu'en choisissant ce thème ou cette nature de tâche dans le site BRAISE (voir figure 3), vous aurez accès à d'autres exercices sur le même sujet. Le mode d'emploi du site est précisé plus bas.

BRAISE : un site d'exercices en ligne

La base d'exercices BRAISE (http://braise.univ-rennes1.fr) aborde d'autres thèmes que ce livre : les séries numériques, l'algèbre linéaire, les équations différentielles, les primitives... et se propose de couvrir le programme classique d'une Licence de mathématiques. Sa conception repose sur les idées présentées ci-dessus et les analyses faites dans l'introduction (voir page 7).

- La base ne vous propose pas d'exercices répétitifs ; en revanche, elle propose des exercices balayant les méthodes et les résultats concernant les concepts mathématiques étudiés.
- Vous pouvez sélectionner des exercices relevant de la même *nature de tâche*. Cette notion peut vous permettre de comprendre qu'à des familles de problèmes ne relevant pas des mêmes thèmes correspond cependant la même démarche.
- Pour chaque exercice, BRAISE vous propose de un à quatre types d'aides à la résolution (voir figure 1).

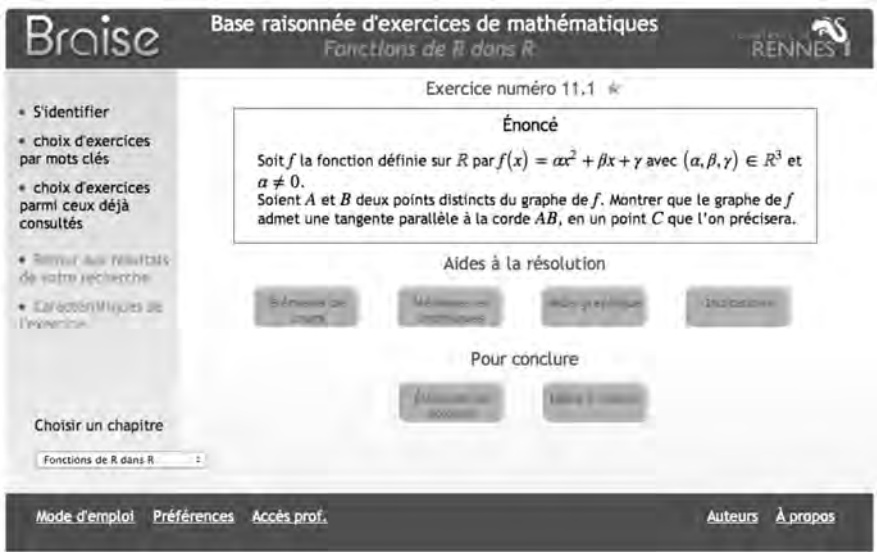
Braise
Base raisonnée d'exercices de mathématiques
Fonctions de R dans R
RENNES 1
S'identifier
choix d'exercices par mots clés
choix d'exercices parmi ceux déjà consultés
Exercice numéro 11.1
Énoncé
Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in R^3$ et $\alpha \neq 0$.
Soient A et B deux points distincts du graphe de f. Montrer que le graphe de f admet une tangente parallèle à la corde AB, en un point C que l'on précisera.
Aides à la résolution
Pour conclure
Choisir un chapitre
Fonctions de R dans R
Mode d'emploi
Préférences
Accès prof.
Auteurs
À propos

Figure 1 L'environnement d'un exercice

  - Des *éléments de cours* : il s'agit d'introduire les connaissances et les concepts particulièrement utiles à la résolution de cet exercice.
  - Des *indications* : il s'agit le plus souvent de la suggestion d'une procédure, avec le risque que vous l'appliquiez sans véritable réflexion. Mais nous avons conservé ce type d'aide pour éviter un blocage, puisque l'objectif est de vous permettre de travailler en autonomie.
  - Des *méthodes et des techniques* : nous en proposons plusieurs afin que vous choisissiez celle qui a le plus de sens pour vous.
  - Une *aide graphique* : une telle aide est proposée à chaque fois que possible, pour enrichir vos représentations.
- Le site BRAISE ne propose pas d'interactivité. En particulier, vous ne pouvez pas entrer une réponse qui serait validée par un logiciel. Les outils informatiques disponibles ne permettent pas le traitement de réponses complexes ; or, elles sont nécessaires pour favoriser des démarches de résolution de problèmes. Vous avez donc la responsabilité de la validation de votre solution et vous pouvez pour cela la comparer avec les *éléments de solution* proposés.
- La solution contient souvent des réflexions heuristiques et la base BRAISE propose une rubrique *idées à retenir*, à consulter une fois la résolution comprise.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

BRAISE : mode d'emploi

Concrètement, vous commencez par choisir le chapitre sur lequel vous voulez travailler, par exemple « Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ » (voir figure 2).

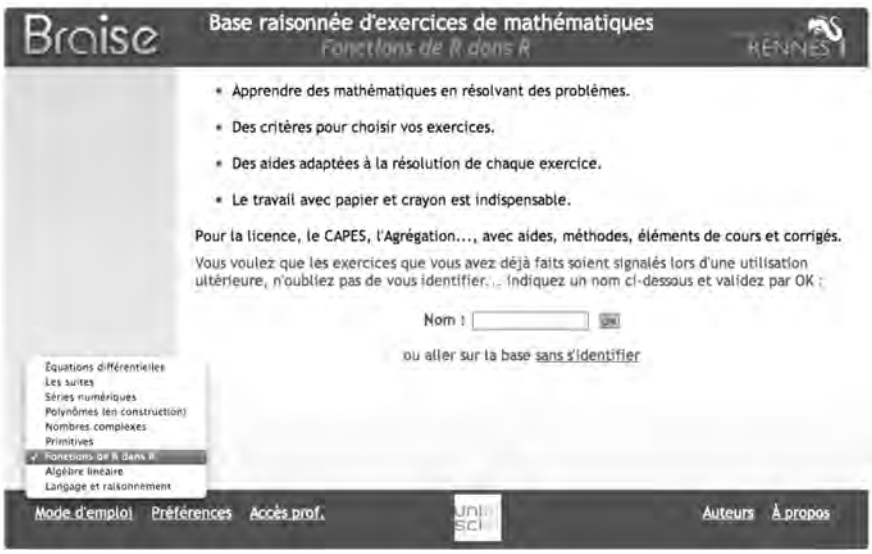
Braise
Base raisonnée d'exercices de mathématiques
Fonctions de R dans R
RENNES 1
• Apprendre des mathématiques en résolvant des problèmes.
• Des critères pour choisir vos exercices.
• Des aides adaptées à la résolution de chaque exercice.
• Le travail avec papier et crayon est indispensable.
Pour la licence, le CAPES, l'Agrégation..., avec aides, méthodes, éléments de cours et corrigés.
Vous voulez que les exercices que vous avez déjà faits soient signalés lors d'une utilisation ultérieure, n'oubliez pas de vous identifier. Indiquez un nom ci-dessous et validez par OK :
Nom :
ou aller sur la base sans s'identifier
Équations différentielles
Les suites
Séries numériques
Polynômes (en construction)
Nombres complexes
Primitives
✓ Fonctions de R dans R
Algèbre linéaire
Langage et raisonnement
Mode d'emploi
Préférences
Accès prof.
Auteurs
À propos

Figure 2 Écran d'accueil de BRAISE

Vous pouvez alors sélectionner des exercices par mots-clefs : choisir un niveau, un thème, une nature de tâche ou éviter des difficultés (voir figure 3).

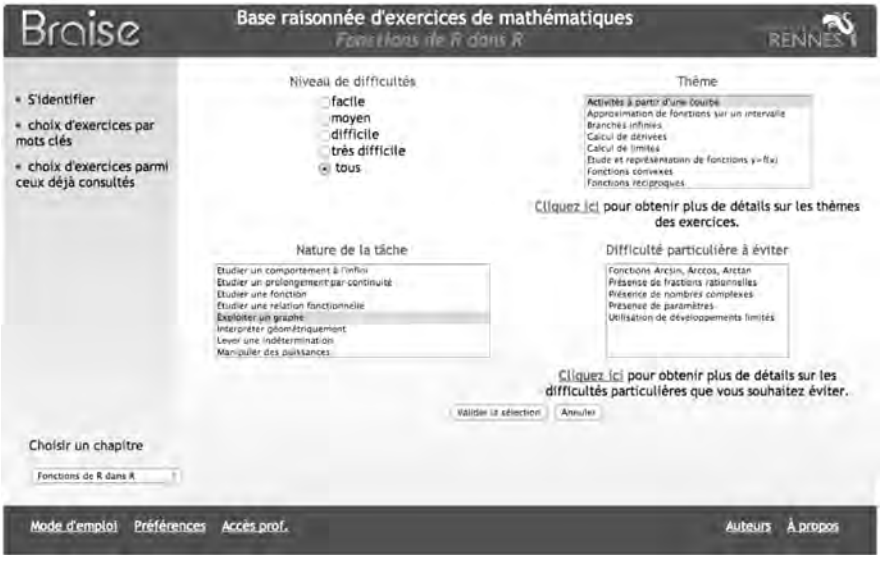

Figure 3 Écran des mots-clefs dans un chapitre

Une fois la sélection validée, une liste de problèmes apparaît (voir figure 4).

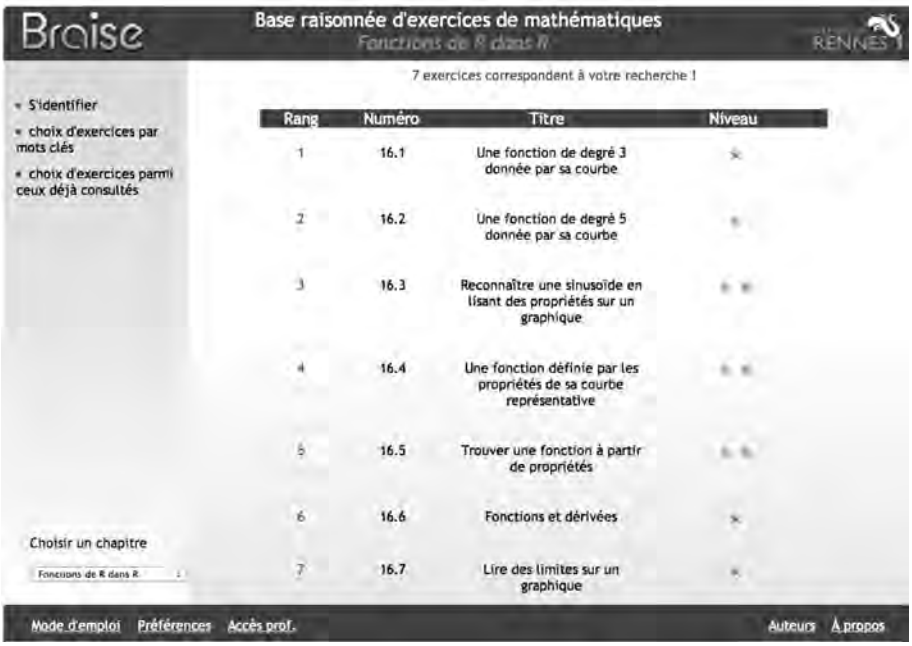

Figure 4 Une liste d'exercices

Chacun est identifié par un titre aussi évocateur que possible et son niveau indiqué par le nombre d'étoiles. Il suffit de cliquer sur l'un des titres pour accéder à l'énoncé de l'exercice et à l'environnement dont nous avons parlé ci-dessus (figure 1) et... de se mettre au travail !

HISTORIQUE

Le projet de BRAISE est né à la fin des années 1990, sous l'impulsion de Michel Viallard, enseignant de mathématiques à l'université Rennes 1. Le but était d'élaborer un manuel (sur papier) d'exercices pour des mathématiques enseignées dans les deux premières années de la Licence de mathématiques. Michel Viallard réunit, dans le cadre de l'IREM de Rennes, une équipe d'enseignant(e)s de l'université avec des expériences variées et ayant souvent travaillé avec les enseignant(e)s du secondaire.

C'était l'époque où, en quelques années, Internet s'étendait rapidement dans les bureaux, puis dans les maisons et les appartements. L'université de Rennes 1 encouragea les projets d'enseignement utilisant les nouvelles technologies.

Ces nouveautés transformèrent le projet initial de Michel Viallard en la conception d'une base d'exercices dite *raisonnée* : BRAISE, en accès libre sur le réseau avec

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

différents dispositifs. Il fut prévu que, dans cette base, l'étudiant ou l'étudiante pourrait trouver des exercices à résoudre sur le chapitre sur lequel il(elle) voudrait travailler, en les sélectionnant suivant différents critères. Tout serait fait pour qu'il(elle) se trouve dans un contexte favorable et ait à sa disposition immédiate les documents qu'il(elle) souhaite. Pour chaque exercice, un simple clic lui donnerait accès à des éléments de cours correspondant à l'exercice, un autre clic à des méthodes pour sa résolution, un autre à des solutions, etc.

Une structure informatique complexe autour des exercices fut élaborée après plusieurs années d'efforts et d'expérimentations et mise en place en 2002. Le chapitre sur les suites numériques fut le premier abordé. Année après année, d'autres chapitres ont été écrits : algèbre linéaire, nombres complexes, fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, séries, équations différentielles, etc. La base compte aujourd'hui plusieurs milliers de pages.

Depuis 2007, ce travail est soutenu par Unisciel, l'*Université des sciences en ligne*.

Enfin, étant passés de l'idée de faire un livre à celle de faire un site avec notre base d'exercices, nous revenons, avec les éditions Dunod, à l'idée de faire un livre qui s'articule avec la base, afin de donner de nouvelles possibilités de travailler les mathématiques.

Note sur la partie informatique

La construction informatique de la base est originale. Elle est due à François Dagorn, ingénieur de l'UFR en informatique et électronique (ISTIC) de l'université de Rennes 1. C'est lui qui donne au site le nom de BRAISE. Il réalise la première version du logiciel fin 2002 : il s'agissait en particulier de traduire automatiquement les exercices du format LaTeX en XML puis d'utiliser ce format pivot pour s'autoriser des sorties en HTML, MathML, PDF.

Depuis cette date, le cœur du système informatique est inchangé ; c'est l'outil tex4ht du regretté Eitan Gurari qui permet de traduire le LaTeX en tout ce qui existe aujourd'hui.

En 2007, Rozenn Dagorn a créé une charte graphique pour la base et François Dagorn en a refondé l'interface. Il assure depuis le fonctionnement de la base, la faisant évoluer et résolvant nombre de problèmes techniques de compatibilité.

INTRODUCTION
RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ET APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

1. LES MATHÉMATICIENS ET LES PROBLÈMES

Pour comprendre la place de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques, il faut d'abord analyser son rôle dans le développement des mathématiques et dans la démarche de chaque mathématicien.

Résoudre des problèmes est le moteur de la plupart des recherches en mathématiques. Citons, par exemple, le théorème de Pierre de Fermat. Celui-ci avait affirmé, vers 1640, un résultat qu'on peut énoncer aujourd'hui sous la forme :

« Pour tout entier n strictement plus grand que 2, on ne peut trouver trois entiers non nuls, x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$. »

Pendant plus de 300 ans, beaucoup de mathématiciens ont essayé, sans succès, de démontrer ce théorème. Ce travail les a conduits à inventer de nouveaux concepts pour voir autrement la situation et se donner de nouveaux moyens d'agir. Ainsi, toute une partie de l'algèbre est née de ces recherches, permettant d'obtenir des résultats partiels pour certains entiers ou pour certaines familles d'entiers. Ce n'est qu'en 1994 qu'Andrew Wiles a réussi à démontrer ce théorème en utilisant des idées très subtiles issues de la géométrie algébrique. Et le travail n'est pas fini, car certains mathématiciens voudraient mieux comprendre pourquoi, pour démontrer un résultat sur les entiers qui s'exprime si simplement, un si grand détour a été nécessaire.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

L'activité du mathématicien ne se réduit pas à essayer de résoudre des problèmes. À certaines époques, la communauté mathématique ressent le besoin de structurer les connaissances mathématiques déjà acquises. Le premier exemple connu est celui donné par Euclide dans ses *Éléments*. Ce dernier, à l'aide de quelques postulats de départ, a reconstruit les mathématiques connues à l'époque. Mais la résolution de problèmes n'est pas étrangère à ces réorganisations. Dans certains cas, il s'agit de clarifier les connaissances pour éviter les conflits autour de la solution de certains problèmes et on peut penser que ce fut l'un des moteurs d'Euclide pour son travail. Dans d'autres cas, la similitude des démarches pour résoudre des problèmes en apparence très différents va conduire à l'introduction de nouveaux concepts éclairant ces proximités. L'apparition de l'algèbre linéaire en est un exemple, qui permet pour certains exercices de raisonner sur les polynômes de degré inférieur ou égal à deux comme on raisonne sur les points de l'espace.

Notons enfin la place essentielle du langage dans les mathématiques. Là encore, les problèmes jouent un rôle central. L'écriture de la solution de problèmes est sans doute l'une des activités les plus pratiquées par le mathématicien. Le langage est aussi un moyen de formuler les problèmes : l'importance de cette démarche est à souligner. C'est, par exemple, celle de David Hilbert, lors du deuxième congrès international des mathématiciens de 1900, qui formula une liste de problèmes ouverts dont certains ne sont toujours pas résolus ; ces problèmes orientèrent la recherche du XX^{e} siècle. Enfin, le langage est indispensable pour développer les théories au travers des définitions et des énoncés de théorèmes. Ces textes précis sont un point d'appui pour avancer dans la solution des problèmes.

2. Quelques points forts de la résolution de problèmes

Essayons de comprendre de quelle manière la résolution de problèmes va contribuer à l'apprentissage des mathématiques.

2.1 Construire sa propre représentation d'un problème

Quand on cherche à résoudre un problème, les démarches engagées vont dépendre de la représentation que l'on s'en fait. Ainsi, si l'on pense le problème comme faisant partie d'une série d'exercices semblables, la première démarche est d'essayer d'appliquer quelques procédures standards. Si, au contraire, on aborde le problème comme une situation inconnue, on va essayer d'enrichir notre représentation de cette situation à l'aide de schémas ou de discours.

Pratiquer la résolution de problèmes permet de travailler sur ces représentations. Il va apparaître une dynamique :

- entre la manière dont on cherche la solution et la manière dont on interprète le problème ;

- entre les procédures que l'on élabore et la représentation que l'on se construit peu à peu ;
- entre les connaissances qui vont servir à agir et celles qui vont servir à comprendre le problème.

2.2 Restructurer ses connaissances

À chaque fois qu'un étudiant fait un exercice dont la résolution ne se réduit pas à l'application d'une procédure standard, il réorganise un peu ses connaissances. C'est ainsi que se développent peu à peu des liens complexes entre les concepts mathématiques et les représentations qu'il s'en fait. Cela va enrichir ses connaissances et augmenter son efficacité dans la résolution de problèmes. Cette organisation des connaissances ne sera pas la même pour tous ; elle dépendra essentiellement de la façon dont elle s'est construite et la fréquentation de vrais problèmes n'est évidemment pas équivalente à la résolution d'exercices trop semblables.

2.3 Identifier des familles de problèmes

L'un des ressorts de la résolution de problèmes est de reconnaître que tel problème nouveau a quelque chose à voir avec tel problème déjà rencontré. Si l'on ne pratique que la résolution d'exercices répétitifs, le risque est de ne construire que des liens assez pauvres entre des exercices très voisins. Or, pour aborder efficacement un problème vraiment nouveau, il faut être capable de repérer ce qu'il a de commun avec des problèmes déjà résolus mais, en première analyse, très différents. Cette capacité ne peut s'acquérir que par une longue pratique de la résolution de problèmes. C'est ainsi que, peu à peu, on reconnaîtra, par exemple, qu'un problème est linéaire ou de nature algébrique ou lié à l'idée de limite ou qu'un schéma va permettre de mieux l'aborder.

2.4 Maîtriser le langage mathématique

La résolution de problèmes conduit à fréquenter le langage mathématique sous tous ses aspects. Bien sûr, il sert à rédiger la solution définitive et, dans cette solution, on utilisera les théorèmes et les définitions qui sont rédigés dans le cours. Mais il est aussi très utile dans la recherche de la solution. En effet, commencer la rédaction d'une solution, même si elle n'aboutit pas, est une étape essentielle pour faire évoluer la représentation du problème ; c'est à ce moment que l'on peut découvrir des difficultés profondes alors qu'on pensait avoir trouvé la solution. Ce langage est enfin utile pour exprimer des conjectures ou pour formuler des sous-problèmes.

La maîtrise du langage mathématique ne peut s'acquérir par une simple imitation ; seule la résolution de problèmes impose assez de contraintes pour faire jouer ensemble tous ses aspects et provoquer ainsi de réels progrès.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

3. Approfondir des connaissances

L'apprentissage des mathématiques est souvent réduit à la maîtrise de connaissances. Qu'apporte ici la résolution de problèmes ?

Bien sûr, elle s'appuie sur les connaissances académiques telles qu'on les trouve habituellement dans un cours.

Mais, elle permet d'aller plus loin dans la compréhension des concepts. Il ne suffit pas, en effet, de les connaître à travers des définitions, des théorèmes et des méthodes ; il faut encore comprendre profondément ce qui les lie. Un simple discours n'y suffira pas ; il faut que chacun s'en fasse des représentations personnelles.

Elle engendre des méthodes heuristiques. Celles-ci ne sont pas souvent explicitées dans les cours, car elles n'apportent pas d'éléments visibles dans la cohérence de ceux-ci. Par exemple : comment faire concrètement pour évaluer une aire, comment lire les propriétés d'une fonction sur sa courbe représentative ?

Elle fait apparaître l'importance des exemples et des contre-exemples, aussi bien ceux qui sont proposés dans les cours que ceux que l'on construit. Ils sont, en effet, très utiles pour formuler des conjectures sur la situation que l'on étudie ou pour vérifier que ce que l'on affirme est vraisemblable.

4. Acquérir des compétences

Quand un étudiant est confronté à un exercice qui ne ressemble en apparence à aucun de ceux qu'il a déjà rencontrés et qu'aucune procédure de résolution ne vient s'imposer à son esprit, la maîtrise des connaissances dont nous venons de parler ne suffira pas. Il lui faut s'appuyer sur d'autres compétences et c'est la résolution de problèmes qui lui permettra de les acquérir.

- Il faut d'abord savoir examiner la situation sous tous ses angles. La meilleure façon d'avancer est d'essayer d'exploiter les idées qui viennent à l'esprit, même si elles ne répondent pas directement à la question. Il faut alors accepter de se trouver dans des impasses et ne pas renoncer.
- Il faut savoir repérer les connaissances qui peuvent s'avérer utiles et s'en servir de manière pertinente. Il peut arriver que l'énoncé du problème ne les suggère en aucune façon. Ainsi devant l'exercice

  « résoudre l'équation $\sin t + \cos t = \sqrt{2}$ »,

  les connaissances qui viennent à l'esprit sont des formules concernant les fonctions trigonométriques. Mais il se trouve que les connaissances sur l'étude des variations d'une fonction peuvent être aussi mobilisées utilement, car le maximum de la fonction $t \mapsto \sin t + \cos t$ est $\sqrt{2}$ et est atteint aux points $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Et cette dernière démarche peut demander moins d'invention.

- Il faut parfois formuler des conjectures et essayer de les démontrer. Par exemple, si l'on cherche un lieu géométrique, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique peut nous permettre de faire des conjectures sur ce lieu. Ou encore, dans l'étude d'une suite, le calcul des premiers termes peut nous donner une idée de la valeur de la limite. Il restera à démontrer ces conjectures.
- Il faut savoir rapprocher un problème nouveau de problèmes connus pour inventer des démarches de résolution. Une façon de le faire est de chercher un sous-problème. Par exemple, pour étudier la convergence d'une suite, on peut essayer de montrer qu'elle est croissante.

  On peut aussi s'intéresser à un problème voisin, que l'on pense savoir résoudre ; on peut, par exemple, modifier certaines hypothèses. Ainsi, devant le problème « étant donnés deux points situés dans un même demi-plan délimité par une droite, comment minimiser la distance pour aller de l'un à l'autre en passant par un point de la droite ? », on peut modifier l'hypothèse en supposant que les deux points sont de part et d'autre de la droite. La solution est alors très simple et elle peut inspirer la solution du problème donné.
- Il faut s'appuyer sur le langage pour comprendre l'énoncé du problème, le reformuler afin de le mieux comprendre, formuler des hypothèses sur la situation, énoncer un sous-problème ou entamer la rédaction d'une partie de solution.

  Par exemple, le problème exprimé en termes algébriques, « Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède une racine réelle », peut se reformuler en utilisant le vocabulaire des fonctions polynômes. Ceci oriente naturellement vers une étude de fonction et l'application du théorème des valeurs intermédiaires.
- Il faut être capable de déclencher, à chaque instant, des moyens de contrôle. Le plus important est de contrôler que les petites déductions ou les calculs que l'on a déjà engagés sont corrects ; souvent en effet, s'il y a une difficulté à résoudre un problème, des fautes sont commises. Et ce n'est pas, le plus souvent, en relisant ce qu'on a écrit que l'on découvre la faute, mais en essayant d'évaluer la vraisemblance de ce qu'on affirme ou en mobilisant des exemples que l'on connaît bien.

5. Déclencher une véritable activité de résolution de problèmes

Si la démarche d'un étudiant consiste à suivre un cours et à étudier quelques exercices résolus et enfin à essayer de résoudre des exercices analogues, il y a peu de chance qu'il acquière les compétences dont nous venons de parler. Il peut se contenter, quand on lui propose un nouvel exercice, d'observer quelques indices qui lui permettent de s'assurer que cet exercice est semblable à un exercice déjà traité et d'appliquer la même procédure de résolution. Il n'y aura pas de travail sur la représentation de cet exercice, ni de restructuration des connaissances.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

À l'inverse, si un étudiant se trouve devant un problème qu'il ne sait en aucune façon comment aborder, le découragement peut l'arrêter dans sa recherche ; et la lecture d'une solution ne le fera pas s'engager dans une démarche de résolution de problèmes.

Il n'est donc pas si facile de déclencher une véritable activité de résolution. C'est toute la stratégie d'apprentissage qui est ici concernée.

L'étudiant devra choisir, autant qu'il le peut, de travailler sur des exercices variés. Il devra accepter de passer du temps sur un exercice difficile et ne pas croire que la lecture de la solution, après une courte recherche, soit efficace pour l'apprentissage. Il pourra travailler avec tous les dispositifs qui privilégient la résolution de problèmes, comme ce livre ou le site BRAISE.

L'enseignant pourra agir sur trois facteurs.

- Choisir un dispositif d'enseignement où les exercices interviennent, aussi souvent que possible, avant l'exposé d'un cours. Dans une telle situation, l'étudiant pourra investir toutes les connaissances antérieures. Il trouvera peut-être des éléments de solutions. Et, surtout, s'il n'en trouve pas, il sera très réceptif à de nouvelles connaissances qui lui permettent de résoudre des exercices qu'il ne savait pas faire auparavant. Le cours prendra alors toute sa signification. En d'autres termes, l'idée est que l'étudiant ne rencontre les connaissances qu'au moment où il en a besoin pour résoudre un problème sur lequel il a déjà travaillé. Bien sûr, il ne s'agit pas de supprimer totalement les exercices d'entraînement ; mais ceux-ci ne sont utiles qu'en fin d'apprentissage pour acquérir de la rapidité et conforter des habiletés déjà acquises.
- Choisir des problèmes adaptés.
  Tous les problèmes, toutes les situations, tous les exercices ne sont pas équivalents pour déclencher une véritable activité de résolution de problèmes. Voici quelques caractéristiques qui favorisent la mise en place d'une telle activité.
  - L'existence de plusieurs procédures de résolution est un élément favorable car elle augmente les possibilités d'action.
  - La réponse attendue doit être très claire pour l'étudiant. Les questions du type « que pensez-vous ? » ou « quelles sont les propriétés ? » sont généralement peu performantes.
  - Un problème trop facile ne déclenchera pas d'activité significative ; mais un problème trop difficile peut provoquer un blocage. Il faut donc proposer des situations suffisamment difficiles, avec toutes les aides nécessaires pour éviter ce blocage.
  - Les problèmes organisés sous forme de questions successives sont utiles pour les évaluations. Mais ils ne déclenchent pas, *a priori*, une véritable activité de résolution de problèmes : souvent les questions cherchent à imposer une procédure, mais le but à atteindre devient brouillé et les liens entre les questions sont parfois invisibles pour l'étudiant.
  - La situation sera favorable si l'étudiant dispose de moyens d'autocontrôle.